



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

EXPLORANDO CONCEITOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES COTIDIANAS COM O USO DO DÍGITO DE VERIFICAÇÃO

Victor Nascimento de Souza¹

Wendel Oliveira Nascimento²

1. Introdução

A importante função da Matemática no entendimento do mundo, fez com que os avanços tecnológicos proporcionassem ao mercado de trabalho a exigência de profissionais mais criativos e flexíveis. Com tais avanços surgiu o Dígito de Verificação - DV ferramenta bastante utilizada em ações humanas, que pode ser usado como material didático no ensinamento de conceitos matemáticos na educação básica.

Estudo na área da educação demonstra que, nos últimos anos, a educação no país, tem a necessidade de ser aplicada de forma dinâmica e eficaz, pois a mesma capacita o aluno para um mundo de relações sociais, culturais e políticas. Levando tudo isso em consideração, o estudo da Matemática, é uma das áreas de maior influência e importância, pois a mesma desenvolve o raciocínio lógico, e prepara o aluno para situações problemas do dia a dia.

O ensinamento da matemática requer do profissional licenciado muito mais que do que o simples conhecimento do conteúdo, exige também metodologias eficazes de ensino para que haja um melhor aprendizado de seus alunos, métodos estes que vão além de quadros e livros. A utilização de matérias manipuláveis pode tornar as aulas do professor de matemática mais interessantes para os alunos, fazendo com que o interesse em aprender seja maior por parte dos mesmos.

¹ Licenciando do Curso de Matemática da Universidade Federal do Acre – UFAC.
victorsouza68@hotmail.com

E-mail:

² Licenciando do Curso de Matemática da Universidade Federal do Acre – UFAC.
wendel.pes@hotmail.com

E-mail:



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional "As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia"

Este trabalho foi desenvolvido durante a disciplina de Prática de Ensino de Matemática I, e apresentado pelos autores em momentos de problematizações da referida disciplina em que explicaram como colocar em prática o que foi observado, e os materiais que foram utilizados para a resolução das questões matemáticas.

Tomando como base os anais dos principais eventos da área de educação matemática em que se busca explorar atividades de ensino de matemática em atividades rotineiras e como aporte teórico a utilização de autores que acreditam que seja possível explorar conceitos matemáticos utilizando atividades cotidianas, tais como D'Ambrósio (2009), Lorenzato (2010) e outros.

Com isso propor-se-á a inserção de algumas atividades utilizando a descoberta do Dígito de Verificação em que para descobri-lo se faz necessário o conhecimento das operações básicas da matemática aplicadas com o uso de determinadas regras utilizadas para a descoberta do dígito verificador.

Espera-se que com essas atividades o aluno perceba a matemática no seu dia a dia, em que o número tem um significado diferente de acordo com o jogo que é jogado.

2. Como funciona o Dígito de Verificação (DV)?

Todos têm conhecimento do dígito verificador, presente em contas bancárias, boletos bancários, cheques, no CPF, no CNPJ e em muitos outros códigos.

Por exemplo, observe o número da conta: **1532- 6**

O número principal ou "real" da conta é 1532, o número 6 é o que chamamos de dígito de verificação e é normalmente o resultado de uma operação matemática em cima do número principal.

A maioria das pessoas sabe o que é o DV, mas nem todo mundo sabe que ele é utilizado para identificar erros de digitação. O valor do DV depende dos demais dígitos; se algo é digitado errado, o DV calculado será diferente e o erro é detectado.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional "As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia"

O algoritmo do módulo 11 é utilizado para calcular o dígito verificador. Vejamos como devemos proceder para encontra-lo.

Cada dígito do número, começando da direita para a esquerda (do dígito menos significativo para o dígito mais significativo) é multiplicado, na ordem, por 2, depois 3, depois 4 e assim sucessivamente, até o primeiro dígito do número. Na sequência efetuamos o somatório dessas multiplicações e depois dividimos o resultado por 11. O resto desta divisão (módulo 11) é subtraído da base (11), o resultado é o dígito verificador.

Por exemplo, se usarmos o algoritmo "módulo 11", o DV da conta bancária 1532 - 6 é calculado da seguinte forma:

	1	5	3	2
x	5	4	3	2

	5	20	9	4
	= 38			
	38/11= 3, em que o resto da divisão = 5			
	Assim, 11 - 5 = 6.			
	Logo o Dígito Verificador = 6			

Se em vez de 1532-6 o digitador entrar 1523-6 (sendo que o respectivo DV desta conta seria 1523-7) o sistema detectará o erro e rejeitará a conta. Mas note que o sistema não sabe qual dígito estará errado. Nem sabe se a conta correta seria a 1532 ou 1523. Este algoritmo apenas detecta erros, não corrige.

Mas como escolher o algoritmo?

A princípio, desenvolver um algoritmo para DV parece muito fácil. Em vez de usar o "módulo 11", poderíamos simplesmente somar os dígitos, certo? Errado.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional "As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia"

Uma simples soma não pegaria o erro do exemplo acima, pois $1+5+3+2$ é igual a $1+5+2+3$.

Conforme, site da internet o algoritmo ideal para dígito verificador cumpre diversas exigências:

O dígito verificador não é facilmente previsível.
Identifica todos os erros de apenas um dígito.
Identifica os erros de inversão simples.
Identifica 90% de qualquer outro tipo de erro (dois ou mais dígitos errados).
Privilegia a detecção de erros típicos de digitação, como inversões ou números vizinhos no teclado. (DETECÇÃO E CORREÇÃO DE ERROS, 2015, p. 2).

Nenhum algoritmo cumpre completamente as exigências acima, mas o "módulo 11" chega bastante perto.

Existem algoritmos que levam em conta o layout do teclado e os erros mais comuns que os digitadores cometem na prática, porém são baseados em tabelas, enquanto o módulo 11 é um cálculo muito simples. Por isso é de longe o mais utilizado na prática.

No caso de códigos como CPF e CNPJ, há dois dígitos verificadores, então idealmente eles pegam todos os erros de até dois dígitos, e 99% de erros maiores.

A propósito, CPF e CNPJ usam uma versão levemente modificada do "módulo 11" para obter seus DVs. Além dos DVs, todos os números do CPF e CNPJ guardam relação matemática entre si, de modo que (teoricamente) apenas o governo seja capaz de emitir CPFs válidos. Um CPF como 11.111.111-80 tem DVs válidos, mas o governo ainda detecta que ele é falso.

O módulo 11 consegue detectar erros de inversão porque ele multiplica cada dígito por um "peso" diferente (2, 3, 4, até 7 e recomeçando em 2), e pesos adjacentes são relativamente primos, de modo que toda inversão simples resulta num DV diferente.

Observe que a conta bancária "pura" tem 4 dígitos, o que significa 10.000 combinações possíveis. Já a conta bancária com DV tem 5 dígitos, ou 100.000



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional "As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia"

combinações. Porém, das 100 mil, 90 mil são inválidas. É assim que um DV consegue pegar 90% de qualquer erro de digitação.

Pesando no dígito de verificação como uma ferramenta para exploração de conceitos matemáticos, Lorenzato (2010, p.18) define o material didático como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem".

Levando em consideração tal definição de Lorenzato, fica perceptível que o uso do cálculo DV pode se tornar um instrumento de ensino de operações matemáticas e por que não dizer de expressões numéricas que se utilizadas em situações problemas que nos depararmos no cotidiano torna a aula mais atrativa e interessante.

De tal maneira, a Matemática não pode ser considerada apenas como uma matéria que é utilizada em sala de aula, pronto e acabada, mas sim como uma:

[...] ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância. (BRASIL, 1998, p.24).

A educação presenciada na escola hoje em dia não pode ser entendida somente como conteúdo fixados a livros, pois com os vestibulares atuais, em especial o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) exigindo mais do estudante que o simples conhecimento bruto das disciplinas ministradas em sala de aula.

A exigência é feita de forma que o aluno necessite associar as matérias aprendidas na escola, com situações que o mesmo vivencia, numa tabela de preços no supermercado, o contato com o código de barras de um produto, ou até mesmo o cálculo do DV ou do CPF, quando é preciso saber os dois últimos números do documento.

Conforme PCNs (1998, p.24), "A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto constante com o contexto natural, social e cultural".

Para que o ensino da matemática ocorra de forma mais versátil, exige também do profissional professor, uma dedicação maior à profissão, pelo amor



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

em transmitir o conhecimento aos alunos. Pois a elaboração de novos métodos de ensino, criação de novos materiais didáticos requer tempo, trabalho, planejamento, etc.

Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo àquilo que ninguém pode tirar de alguém que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário, mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e os macetes que conhece. (D'AMBROSIO, 2009).

3. Atividades Práticas com o Dígito de Verificação (DV)

O planejamento para que o DV seja usado como material didático foi pensado de forma que o aluno calcule os números de verificação de documentos, contas bancárias, CEP, etc. Os exemplos mais comuns do cálculo do DV são os do CPF e o do código de barras realizado por um grupo de professores em formação inicial em momentos de Estágio Supervisionado na Extensão e na Pesquisa da Universidade Federal do Acre e apresentado a experiência no XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, ocorrido em 2013 em Curitiba.

O trabalho de Silva et al. (2013) foi aplicado no Colégio de Aplicação/CAP -UFAC, cujo título do artigo foi “Explorando o código de barras no ensino da matemática através do tratamento da informação”.

Outro artigo que merece destaque foi o intitulado “Problematizando com o Código de Barras numa perspectiva de Prática Indisciplinar na Formação Inicial de Matemática” desenvolvido em momentos de Prática de Ensino de Matemática I, por Souza et al. (2016) e apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática em São Paulo, com o objetivo de explorar o uso do código de barras em boletos bancários e supermercados. Esses artigos nos inspiraram a dar continuidade a esse estudo sob o olhar agora para o número de uma conta bancária e o CPF.

O método de cálculo do CPF se baseia em duas rotinas tradicionais: Módulo 11 e Módulo 10, conforme questão do Exame Nacional do Ensino Médio, no ano de 2009.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

Para cada indivíduo, a sua inscrição no Cadastro de Pessoa Física (CPF) é composto por um número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, na forma d1d2, em que os dígitos d1 e d2 são denominados dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, calcula-se o resto r da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11, e se esse resto r for 0 ou 1, $d1$ é zero, caso contrário $d1 = (11 - r)$. O dígito $d2$ é calculado pela mesma regra, na qual os números a serem multiplicados pela sequência dada são contados a partir do segundo algarismo, sendo $d1$ o último algarismo, isto é, $d2$ é zero se o resto s da divisão por 11 das somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário, $d2 = (11 - s)$.

Suponha que João tenha perdido seus documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que os nove primeiros algarismos eram 123.456.789. Neste caso, os dígitos verificadores $d1$ e $d2$ esquecidos são, respectivamente, A) 0 e 9. B) 1 e 4. C) 1 e 7. D) 9 e 1. E) 0 e 1.

Vejamos a Resolução: O primeiro dígito verificador é calculado através da subtração de 11 pelo resto da divisão da soma do produto de cada número por 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 e 2 pelos dígitos do CPF, respectivamente, por 11. Caso o resto desta divisão seja 0 ou 1, o dígito verificador vale 0. Como $1 \times 10 + 2 \times 9 + 3 \times 8 + 4 \times 7 + 5 \times 6 + 6 \times 5 + 7 \times 4 + 8 \times 3 + 9 \times 2 = 210$ e 210 dividido por 11 deixa resto 1, o primeiro dígito verificador é 0. A mesma regra é aplicada ao dígito verificador 2, porém os números a serem multiplicados começam a partir do segundo algarismo e o último algarismo é o $d1$, já encontrado. Como $2 \times 10 + 3 \times 9 + 4 \times 8 + 5 \times 7 + 6 \times 6 + 7 \times 5 + 8 \times 4 + 9 \times 3 + 0 \times 2 = 244$ e 244 deixa resto 2 na divisão por 11, $d2 = 11 - 2 = 9$.

Assim, a resposta correta será a letra, (A) 0 e 9.

A tabela a seguir contém alguns números de CPF para identificar sua veracidade através do DV.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

Tabela 1 – Verificação do CPF

CPF	É válido?
111.222.333-96	
111.222.444-05	

Fonte: Site da internet.

No CPF 111.222.333-96 para verificar sua veracidade basta calcular se seu DV está coincidindo com a sequência numérica do CPF, veja através de uma tabela o cálculo:

Tabela 2 – Demonstrativo de resolução

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	2	2	2	3	3	3
X10	X9	X8	X7	X6	X5	X4	X3	X2
10	9	8	14	12	10	12	9	6
SOMA=90/11=8, RESTO 2, 11-2=9								

Fonte: Material produzido durante a disciplina Prática de Ensino de matemática I, ago. 2016.

Pode-se observar que cada número do CPF recebeu uma denominação alfabética de A até I sucessivamente. O cálculo do DV segue a seguinte regra quando se trata de Módulo 11:

- Multiplica-se em ordem decrescente os valores em A,B,C,D,E,F,G,H,I por 10,9,8,7,6,5,4,3,2;
- Somam-se todos os produtos das multiplicações;
- Divide por 11 (Módulo 11);
- Obtêm-se o resto da divisão;
- Subtrai o resto da divisão por 11.

Após seguir os passos descritos se obtém o primeiro dígito verificador, o número 9.

Veja como se calcula o segundo dígito:



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

Tabela 3 - Demonstrativo de resolução

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	1	2	2	2	3	3	3	9
X11	X10	X9	X8	X7	X6	X5	X4	X3	X2
11	10	9	16	14	12	15	12	9	18
SOMA=126/11=11 RESTO 0, 11-11=0									

Fonte: Material produzido durante a disciplina Prática de Ensino de matemática I, ago. 2016.

Pode-se observar que aumentou um algarismo na tabela, pois trata-se do dígito encontrado anteriormente. O cálculo do segundo dígito segue a seguinte regra quando se trata de Módulo 11:

- Multiplica-se em ordem decrescente os valores em A,B,C,D,E,F,G,H,I,J;
- Somam-se todos os produtos das multiplicações;
- Divide-se por 11 (Módulo11);
- Obtêm-se o resto da divisão;
- Subtrai o resto da divisão por 11.

Após seguir os passos descritos se obtêm o segundo dígito verificador, o número 0. É importante frisar que quando o resto da divisão for 0 ou 1, o dígito verificador localizado será 0. Logo, o dígito verificador da seguinte sequência numérica é inválido: 111.222.333-96.

No CPF 111.222.444-05 para verificar sua veracidade basta calcular se seu DV está coincidindo com a sequência numérica do CPF, seguindo os mesmos passos utilizados acima, verifica-se com eficácia a veracidade do DV apresentado no problema, veja a tabela:

Tabela 4 - Demonstrativo de resolução

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	2	2	2	4	4	4
X10	X9	X8	X7	X6	X5	X4	X3	X2
10	9	8	14	12	10	16	12	8
SOMA=99/11=8 RESTO 2, 11-2=9								

Fonte: Material produzido durante a disciplina Prática de Ensino de matemática I, ago. 2016.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

Aplicando os cálculos já descritos na tabela anterior se obtêm o primeiro dígito verificador, o número 9. Com esse primeiro dígito já pode concluir que o Dígito Verificador do CPF acima é inválido. Veja o segundo dígito verificador:

Tabela 5 - Demonstrativo de resolução

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	1	2	2	2	4	4	4	9
X11	X10	X9	X8	X7	X6	X5	X4	X3	X2
11	10	9	16	14	12	20	16	12	18
SOMA=138/11=12 RESTO 6, 11-6=5									

Fonte: Material produzido durante a disciplina Prática de Ensino de matemática I, ago. 2016.

Aplicando os cálculos já descritos se obtêm o segundo dígito verificador, o número 5. Portanto pode-se concluir com toda certeza que o Dígito Verificador do CPF 111.222.444-05 é inválido.

5. Conclusão

Neste trabalho analisou-se com veracidade, métodos usados para o cálculo do Dígito de Verificação, sejam eles a Congruência Módulo 11 e 10 vistos no Ensino Superior no estudo de Álgebra.

Fica claro toda a didática que se atribui ao ensino da matemática e suas ferramentas do cotidiano, como por exemplo: o cálculo do Dígito de verificação.

A pesquisa realizada trouxe a nós um novo olhar ao ensino da matemática, tal qual, proporcionou uma maior tolerância quanto à aplicação dos cálculos nas situações problemas. Os objetivos de abordar o ensinamento da matemática através do Dígito de Verificação foram realizados com sucesso nesse trabalho, o que faz aguçar ainda mais o conhecimento para uma pesquisa profunda no que tem por trás do Dígito de Verificação.

Agradecemos a atitude de nossa professora de Prática de Ensino de Matemática I por nos proporcionar uma aula diferenciada e uma nova forma de vivenciar a matemática através da pesquisa, desde o primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática, sendo mediadora da atividade nos proporcionando ser



x Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Occidental
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

autor de nossa própria prática e instigando sempre com perguntas para irmos a busca de respostas.

Por fim, acreditamos que o aprendizado do aluno depende, em grande parte, do professor, que pode proporcionar ao aluno uma nova forma de ensinar pela pesquisa, proporcionando a exploração de atividades com métodos que torne sua aula mais significativa ao aluno, como o que sugerimos nessa investigação.

6. Referências bibliográficas

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental.** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

D’AMBROSIO, Ubiratan et. al. **Educação Matemática: Da teoria à prática.** Campinas. SP: Papyrus, 2009. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Dígito de Verificação, Detecção e correção de erros, 2015. Disponível em: <[https:// epxx.co./artigo/edc.html](https://epxx.co./artigo/edc.html)>. Acesso em: 20 Ago. 2016.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender Matemática.** Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores).

SILVA, A. G.; SANTOS, I. M.; FREITAS, A. L.; BEZERRA, S. M. C. B. Explorando o código de barras no ensino da matemática através do Tratamento da Informação. *In:* XI ENEM – Encontro nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM/SBEMPR/PUC-PR, 2013. P. 01-10. 1 CD-ROM.

SOUZA, K. A. de; SILVA, L. V. da; SOUZA, M. A. O. de; BEZERRA, S. M. C. B. Problematizando com o Código de Barras numa perspectiva de Prática Indisciplinar na Formação Inicial de Matemática. *In:* ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 01-12.



x Simpósio Linguagens e Identidades da/nas Amazônias Sul-Occidentais
VIII Colóquio Internacional “As Amazônias, as Áfricas e as Áfricas na Pan-Amazônia”

Disponível em: <

http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/5384_2437_I

D.pdf>. Acesso em: 07 ago. 2016.