

CONFORMIDADE EM PROJEÇÕES ESTEREOGRÁFICAS

Gean da Silva Nascimento¹; Raul Rabello Mesquita²

Ciências Exatas e da Terra

RESUMO

A projeção estereográfica: $\Pi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \pi$ é a aplicação da superfície esférica S^2 , menos um ponto N , ao plano π , que é perpendicular à reta NO , sendo O o centro da esfera. Essa projeção é definida da seguinte forma: dado um ponto P pertencente a $S^2 \setminus \{N\}$, traça-se a reta PN , com isso o ponto $Q = \Pi(P)$ é o ponto de intersecção de PN com o plano π . Tendo isso em vista, este trabalho vem fazer um estudo das propriedades dessa projeção, para que seja possível trabalhar com ela sem maiores preocupações, com relação às transformações que a aplicação faz. Com isso, propõe-se a formalização da projeção achando a lei de formação de Π e da sua inversa, Π^{-1} , para que seja possível o estudo das propriedades principais. Para esse fim faz-se uso da álgebra vetorial da seguinte maneira, a partir de N , constrói-se uma reta que passa pelo ponto genérico $P=(x,y,z)$, pertencente a $S^2 \setminus \{N\}$, e com isso aplica-se a condição do plano π para se achar o parâmetro da reta em função das coordenadas de P , de tal forma que ao substituir esse parâmetro na reta obtêm-se os pontos que pertencem simultaneamente a ao plano e a mesma, ou seja, obtemos a lei da aplicação Π que pode ser vista na Equação 1.

$$\Pi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \pi(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad (1)$$

Para se achar a sua inversa, basta construir a reta QN , sendo Q um ponto genérico do plano π , e aplicar a condição de pertencer a esfera para se achar a lei da aplicação Π^{-1} , que pode ser vista na Equação 2.

$$\Pi^{-1}: \pi \rightarrow S^2 \setminus \{N\} (u, v) \rightarrow \left(\frac{2y}{u^2+v^2+1}, \frac{2x}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right) \quad (2)$$

Com isso é possível verificar que tanto a Π como a Π^{-1} são contínuas, mostrando dessa forma o homeomorfismo dessa projeção. Assim, pode-se fazer o estudo mais detalhado quanto à conformidade dessa aplicação, ou seja, o fato de que ela preserva ângulos após a sua aplicação. Essa propriedade é abordada utilizando a geometria Euclidiana clássica. Contudo, pode-se perceber que além da conformidade da projeção estereográfica, tem-se também que círculos na superfície esférica que passam pelo ponto N projetam-se como retas no plano π e que círculos na superfície esférica que não passam pelo ponto N projetam-se como círculos no plano π .

Palavras-chave: Projeção Estereográfica, Conformidade, Geometria.

¹ Discente PETiano Bolsista do Grupo PET Matemática do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus - gean.s.nascimento@gmail.com.

² Tutor do Grupo PET Matemática, Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus - raulrabello@yahoo.com.br.