

DISTRIBUIÇÃO ASSIMÉTRICA T-STUDENT TIPO 3: UMA APLICAÇÃO A DELINEAMENTOS INTEIRAMENTE CASUALIZADOS

T-STUDENT TYPE 3 ASYMMETRICAL DISTRIBUTION: AN APPLICATION TO COMPLETELY RANDOMIZED DESIGN

Raquel Aline Oliveira Eloy¹, Altemir da Silva Braga^{1*}, Djair Durand Ramalho Frade¹, Ana Patrícia Bastos Peixoto¹, Isaac Dayan da Silva²,

1. Escola Superior de Agricultura Luiz de "Queiroz" – USP de São Paulo, SP, Brasil.

*Autor correspondente: altemir@usp.br

RESUMO

Apresentar um novo estudo na área de estatística com aplicações a dados reais sempre será um desafio para os pesquisadores, principalmente, da área de estatística experimental. Neste trabalho utilizou-se a distribuição assimétrica t-Student assimétrica tipo 3 (ST3) com quatro parâmetros para avaliar o efeito do teor de B e a absorção de S na produção de grãos de soja. Essa distribuição é simétrica, assimétrica, platicúrtica, leptocúrtica, unimodal e bimodal assimétrica para alguns valores paramétricos. Encontra-se bem definida e fundamentada por meio de propriedades matemáticas. As estimativas dos parâmetros foram obtidas utilizando o método da máxima verossimilhança. Foram realizados estudos de simulação para diferentes cenários e, ainda, a análise de resíduos. O novo estudo obteve melhores resultados em relação ao modelo normal, conforme os critérios de comparação de modelos AIC BIC.

Palavras-chaves: Delineamentos. Assimetria. Estimação. Verossimilhança. Comparação. Resíduos.

ABSTRACT

Providing a new study in the field of statistics with applications to real data will always be a challenge for researcher, mainly, of experimental statistics. In this, work was used the Student t-distribution asymmetric type 3 (ST3) with four parameters to evaluate the effect of boron content and absorption the sulfur in the production of soybean. The parameter estimates were obtained using the maximum likelihood method. Thus, using the BIC AIC models comparison criteria ST3 distribution showed better results compared to the normal model.

Keywords: Design. Asymmetry. Estimation. Comparison. Residuals.

1. INTRODUÇÃO

A estatística experimental é a ferramenta mais indicada para trabalhar com dados provenientes de ensaios experimentais. Ela vem contribuindo na pesquisa científica desde o planejamento até a interpretação dos resultados, conforme Banzatto e Kronka (2013). Este fato que faz com que a análises estatísticas desempenhem um papel fundamental no campo científico, visto que tais técnicas são utilizadas em quase todas as etapas da pesquisa. Neste contexto, muitos estudos são realizados na estatística experimental com a finalidade de melhorar as análises e ajudar na interpretação dos resultados.

Conforme Johnston e Pennypacker (1993), delinear um experimento é planejar condições controle e experimentais de modo a permitir comparações significativas entre verificar os efeitos da variável independente e responder ao problema de pesquisa. Por esta

razão, é extremamente importante que o pesquisador conheça as características, as possibilidades e os limites dos delineamentos experimentais.

Os delineamentos inteiramente causalizados (DIC) são utilizados quando a variabilidade entre as parcelas experimentais é muito pequena, isto é, praticamente, inexistente. Devido a esta exigência, são utilizados em locais em que as condições experimentais possam ser bem controladas. A maior desvantagem desse delineamento é que toda a variabilidade existente pode inflacionar o erro experimental, exceto a fonte de variação devida aos efeitos dos tratamentos, podendo comprometer os resultados inferenciais da pesquisa.

Dentre as distribuições de probabilidades utilizadas na área da experimentação a distribuição normal é uma das mais destacadas. Porém, essa distribuição não se ajusta bem a dados que apresentam assimetrias, devido possuir apenas os dois primeiros momentos diferentes de zero, ou seja, a média (parâmetro de locação) e o desvio-padrão (parâmetro de escala), conforme (Mood, 1974). Além disso, alguns pressupostos precisam ser satisfeitos: homocedasticidade, normalidade dos resíduos, independência dos erros e linearidade para verificar a qualidade do ajuste.

No entanto, existem muitos fenômenos que não satisfazem a tais suposições. Neste caso, as distribuições assimétricas podem ser uma alternativa, visto que podem ajustar-se melhor aos dados, pois modelam a assimetria, a curtose e, naturalmente, as possíveis, observações extremas. Existem trabalhos na literatura sugerindo uma transformação na variável resposta para resolver o problema da falta de normalidade dos erros. No entanto, tal metodologia ocasiona uma mudança de interpretação dos resultados, fato que não interessa ao pesquisador, porque a variável passa para uma nova escala, conforme (Banzato; Kronka, 2006). Sendo assim, uma das alternativas para contornar o problema da falta de normalidade dos erros é a utilização de modelos que apresentam caudas mais pesadas. Por exemplo, a distribuição de t-Student tem essa propriedade por meio do parâmetro que representa os graus de liberdade.

Por isso, muitos estudos são realizados com a finalidade de criar novas famílias de distribuições que acomodem, tanto a medida de assimetria, quanto a curtose dos dados. Conseqüentemente, tais famílias passam a ter mais parâmetros e exigir mais recursos computacionais. Pode-se encontrar na literatura algumas extensões da distribuição normal, como por exemplo, skew-normal, logística-normal, log-normal (Box-Cox) e beta-normal.

Essas distribuições normais-assimétricas vêm sendo utilizadas em várias áreas do conhecimento, por exemplo, a skew-normal na área de seguros agrícolas, a beta normal e a odd log-logística normal nas áreas de análise de sobrevivência e estatística experimental,

respectivamente. A distribuição gama-normal, recentemente, em tensão de ruptura das fibras de carbono. Macerau (2012) realizou um estudo comparativo das distribuições assimétricas X-estável, normal, t - Student e Laplace. Os ajustes foram avaliados e comparados com base na análise dos resíduos e segundo diferentes critérios de qualidade de ajuste, como o Critério de Informação de Akaike - AIC (Akaike, 1974) e o Critério de Informação Bayesiano - BIC (Schwarz, 1978).

Neste contexto, realizou-se este estudo utilizando a distribuição t - Student assimétrica tipo 3 (ST3). Tal distribuição foi proposta e fundamentada matematicamente utilizando o método proposto por (Fernández; Osiewalski; Steel, 1995). Esta metodologia destaca-se, pois não requer a função de distribuição acumulada. Além disso, propriedades matemáticas como os momentos são fáceis de serem obtidos. Na literatura encontram-se aplicações em retornos financeiros, em (Fernández; Steel, 1998), e outras aplicações, em Azzalini e Capitanio (2003).

Dessa forma, conduziu-se este estudo, com o objetivo de ajustar o modelo de regressão na distribuição ST3. O ajuste verificou-se o efeito do teor de boro e a absorção de enxofre na produção de grãos de soja. Além disso, a distribuição ST3 foi comparada com a normal utilizando os critérios AIC e BIC. Concluindo-se, após as análises estatísticas, que a distribuição ST3 explicou melhor o conjunto de dados do que a distribuição normal.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Os dados utilizados nesta aplicação são referentes a um ensaio experimental conduzido no Bloco 3, do Centro de Pesquisa Geraldo Schultz, localizado no município de Iracemápolis-SP. O clima segundo Köppen é do tipo Cwa (clima tropical de altitude, com chuvas no verão e seca no inverno). O solo foi classificado como Latossolo Vermelho distrófico. O objetivo do experimento foi avaliar o efeito do teor de boro (B) e a absorção de enxofre (S) na produção de grãos de soja. A pesquisa foi realizada pela empresa Produquímica, em Iracemápolis-SP, no ano agrícola 2014/2015.

A semeadura foi realizada no dia 12 de novembro de 2014, com espaçamento entre linhas de 0,5 m e densidade de 16 sementes por metro linear. Cada parcela foi composta de 6 linhas com 7 m de comprimento, com 6 repetições por tratamento. A parcela útil foi constituída por 2 linhas com 5 m de comprimento. Foi utilizado um tratamento controle (Tratamento 1) e, além disso, o experimento foi conduzido por meio de um delineamento inteiramente casualizado com 4 repetições e 7 tratamentos. Conforme o quadro abaixo:

Tabela 1: Produtos utilizados na condução do experimento. CPGS, Iracemópolis - SP, 2015

Tratamentos	Dose de Boro (kg ha ⁻¹)	Dose de Enxofre (kg ha ⁻¹)
1 Controle	-	-
2 Sulfurgran	-	38,5
3 Sulfurgran + Borosol	1	38,5
4 Sulfurgran + ActiveBor	1	38,5
5 Sulfurgran + Ulexita	1	38,5
6 Sulfurgran + Produbor	1	38,5
7 Sulfurgran B-MAX	1	38,5

Tabela 2: Descrição e composição dos produtos utilizados na condução do experimento

Produto Comercial	Composição	Granulometria	S%	B%
1 Controle	-	-	-	-
2 Sulfurgran	S elementar	Pastilhado	90	-
3 Sulfurgran + Borosol	Elementar + ácido bórico	Pastilhado + pó	90	17
4 Sulfurgran + ActiveBor	Elementar + octaborato de sódio	Pastilhado + pó	90	20,9
5 Sulfurgran + Ulexita	Elementar + ulexita	Pastilhado + pó	90	14
6 Sulfurgran + Produbor	Elementar + ulexita parcialmente acidulada	Pastilhado + granulado	90	10
7 Sulfurgran B-MAX	Elementar + ulexita na mesma pastilha	Pastilhado	77	2

2.1 Distribuições Assimétricas

Uma das características importantes das distribuições assimétricas é que elas preservam as propriedades matemáticas da distribuição da qual foi gerada. Por exemplo, a distribuição normal assimétrica e a distribuição t- Student assimétrica, ambas permanecem com as propriedades dos submodelos normal e t - Student, respectivamente, (Azzalini, 1985).

Conforme Campos (2011), muitos estudos nem sempre estão de acordo com o modelo normal, devido à falta de simetria na distribuição ou presença e distribuições com caudas mais pesadas ou mais leves do que o modelo normal. Neste sentido, confirma (Cruz; Branco, 2009),

que vários trabalhos vêm sendo propostos com a utilização de modelos mais flexíveis para o erro, que podem ser mais realistas, ver por exemplo, Azzalini (1999), Diccio e Monti (2004) e Genton (2004).

Muitos autores utilizaram às distribuições assimétricas para estudos de modelagem em que ocorrem assimetria, caudas mais pesadas ou bimodalidade. Campos (2011) ajustou modelos de regressão não lineares considerando erros normais assimétricos e a t-Student assimétricos com e sem heterocedasticidade. O autor concluiu em seu trabalho que o modelo assimétrico normal foi melhor do que os demais. Cruz e Branco (2009), fizeram um estudo de modelos de crescimento e consideraram distribuições assimétricas dos erros em dados clínicos de gestantes e concluíram que à distribuição assimétrica t - Student foi a que melhor se ajustou aos dados.

Um estudo do modelo de crescimento de Gompertz aplicado em dados de pesos de codornas, machos e fêmeas, realizados por Rossi e Santos (2014), considerou distribuições assimétricas e simétricas para os erros e foi constatado que os modelos em erros assimétricos normais e t-Student, respectivamente, foram o que obtiveram melhores ajustes aos dados. Guedes, Martins e Carneiro (2014), ajustaram modelos de regressão com erros normais e com erros normais assimétricos a dados de altura de plantas e o modelo com erros normais assimétricos mostrou-se mais adequado em algumas situações.

Definição 2.1 Coeficiente de assimetria: *Seja X uma variável aleatória qualquer com valor esperado μ e desvio-padrão σ . O coeficiente de assimetria de X , denotado por α_3 , indica o grau de assimetria da sua distribuição de probabilidade e é definida por:*

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3},$$

em que supomos a existência do terceiro momento de X (Magalhães, 2013).

Definição 2.2 Coeficiente de Curtose: *Seja X uma variável aleatória qualquer com valor esperado μ e desvio-padrão σ . O coeficiente de curtose da variável X , denotado por α_4 , mede a intensidade dos picos da sua distribuição de probabilidade e é definido por:*

$$\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4},$$

em que é suposto a existência do quarto momento de X . No caso de distribuição unimodal utiliza-se o intervalo,

$$\mu - M_o,$$

em que μ e M_o são, respectivamente, a média e a moda da distribuição. A relação apresentada é denominada de Medida de Assimetria de Pearson, baseia-se na relação entre moda e média, pode-se emprega-las para determinar o tipo de assimetria, se:

- $\mu - M_o = 0$, a assimetria é nula, ou seja, a distribuição é simétrica;
- $\mu - M_o < 0$, a assimetria é à esquerda;
- $\mu - M_o > 0$, a assimetria é à direita.

Uma medida que supera esse é o Coeficiente de Assimetria de Pearson, dado por:

$$A_s^P = \frac{\mu - M_o}{\sigma},$$

em que σ é o desvio-padrão da distribuição. A utilização dessa expressão envolve dificuldade caso a distribuição apresente mais de uma moda. Caso a média e o desvio-padrão não sejam medidas disponíveis, podemos calcular a assimetria utilizando os quartis, por meio do Coeficiente Quantil de Assimetria, dado por,

$$A_s^B = \frac{Q_3 - 2M_d + Q_1}{Q_3 - Q_1},$$

em que Q_1 e Q_3 são o primeiro e terceiro quartis, respectivamente, da distribuição (Yule, 1912; Bowley, 1920). O coeficiente Quantil é conhecido como Coeficiente de Assimetria de Bowley. Como não foi possível obter os momentos da distribuição ST3 de forma analítica, uma alternativa para as medidas de assimetria \mathfrak{B} (Galton, 1883) e de curtose \mathfrak{M} (Moors, 1988), são dadas por:

$$\mathfrak{B} = \frac{Q(6/8) + Q(2/8) - 2Q(4/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}$$

e

$$\mathfrak{M} = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}$$

respectivamente.

Os gráficos de assimetria e de curtose de X para alguns valores paramétricos foram mostrados nas Figuras (1) e (2).

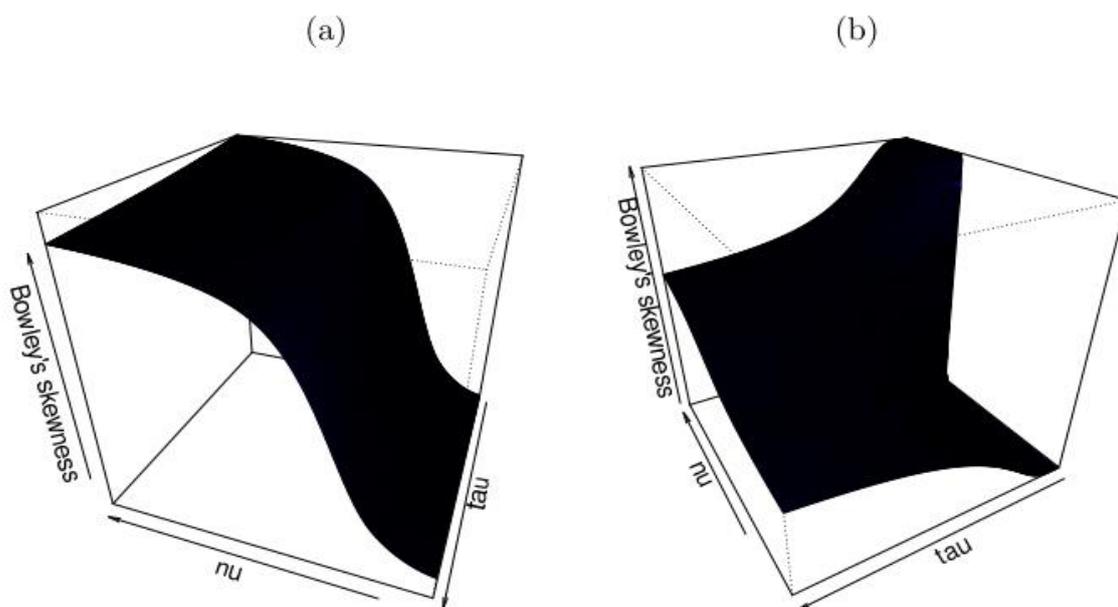


Figura 1: Galton's skewness para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (a) em função de $\lambda \in [0; 0,9]$ com $\alpha \in [0; 1,5]$ e Gráfico (b) em função de $\lambda \in [0; 0,6]$ com $\alpha \in [0; -0,5]$.

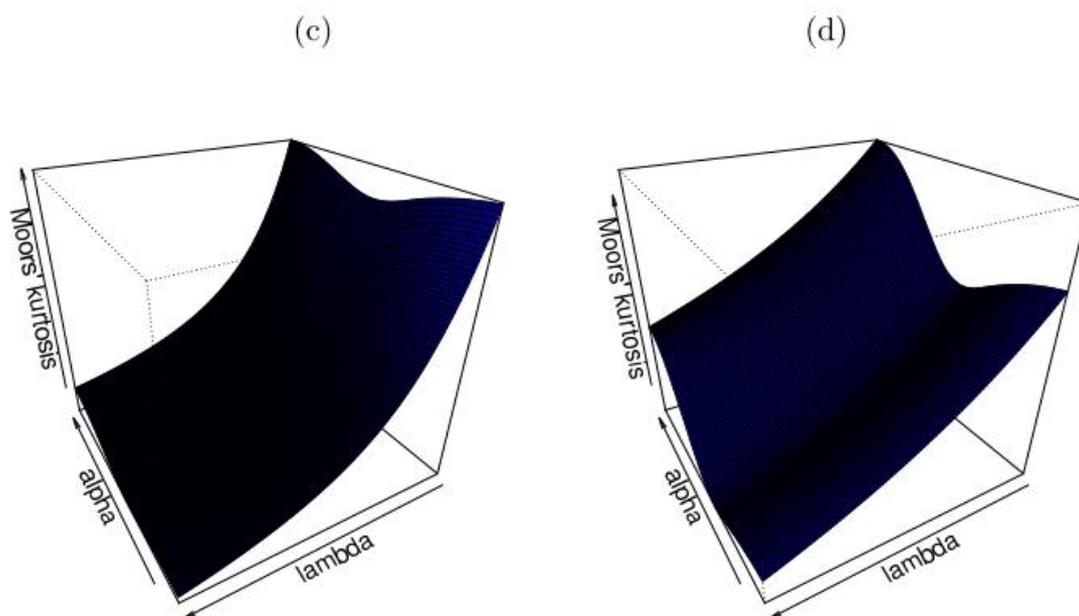


Figura 2: Moors' kurtosis para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (c) em função $\lambda \in [0; 0,9]$ com $\alpha \in [0; 1,5]$ e Gráfico (d) em função de $\lambda \in [0; 0,6]$ com $\alpha \in [0; -0,5]$

2.2 Método para obter uma distribuição assimétrica

Fernández e Steell (1995), definiram um método para transformar uma distribuição simétrica em uma função densidade assimétrica que é dado por:

$$f_X(x; \tau) = \frac{2}{\tau + \frac{1}{\tau}} \begin{cases} f_X(\tau x), & x < 0 \\ f_X\left(\frac{x}{\tau}\right), & x \geq 0 \end{cases}$$

em que $\tau > 0$ é o parâmetro de assimetria e $f_X(x)$ é a função densidade da distribuição simétrica.

As principais propriedades de $f_X(x; \tau)$ são:

- i. Se $\tau = 1$, então, tem-se o caso simétrico, isto é, $f_X(x|\tau = 1) = f_X(x)$;
- ii. A função $f_X(x|\tau)$ mantém a mesma moda de $f_X(x)$. Uma vez que $f_X(x)$ é unimodal e simétrica em torno de zero, a moda será sempre no zero;
- iii. A massa de probabilidade à esquerda e à direita de zero é independente de $f_X(x)$, ou seja,

$$F_1(x) = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \int_0^{\infty} f_X\left(\frac{x}{\tau}\right) dx = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}, \text{ se } x \geq 0$$

$$F_2(x) = 1 - P(x \geq 0) = 1 - \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} = \frac{1}{1 + \tau^2}, \text{ se } x < 0.$$

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \tau^2$$

- iv. A distribuição será assimétrica à direita se $\tau > 1$ e assimétrica à esquerda se $\tau < 1$.

A existência dos momentos de $F_X(x|\tau)$ depende dos momentos absolutos de $F_X(x)$. O r -ésimo momento é dado por:

$$E_X(x^r|\tau) = \frac{\tau^{r+1} + \frac{(-1)^r}{\tau^{r+1}}}{\tau + \tau^{-1}} M_r,$$

em que,

$$M_r = 2 \int_0^{\infty} x^r f_X(x) dx,$$

é o r -ésimo momento absoluto de $f_X(x)$.

A média e a variância de $f_X(x|\tau)$ são dadas, respectivamente, por:

$$E_X(x|\tau) = M_1 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) = \mu$$

e

$$Var_X(x|\tau) = (M_2 - M_1^2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2M_1^2 - M_2 = \sigma^2.$$

O coeficiente de assimetria de $f_X(x|\tau)$ pode ser calculado por:

$$A(x|\tau) = \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \frac{(M_3 + 2M_1^3 - 3M_1M_2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 3M_1M_2 - 4M_1^3}{\left[(M_2 - M_1^2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2M_1^2 - M_2 \right]^{3/2}}.$$

O coeficiente de curtose de $P(x|\tau)$ pode ser calculado por:

$$K(x|\tau) = \frac{E_X(x^4|\tau) - 4E_X(x|\tau)E_X(x^3|\tau) + 6E_X(x^2|\tau)E_X(x|\tau)^2 - 3E_X(x|\tau)^4}{Var_X(x|\tau)^2}.$$

2.3 Distribuição t -Student

A variável aleatória X tem distribuição t -Student com notação $X \sim t(\mu, \sigma^2, \nu)$ se sua densidade for escrita da forma:

$$f_X(x, \mu, \sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}\sigma} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, x \in (-\infty, \infty),$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, $\Gamma(\cdot)$ é a função matemática gama e $\nu \geq 1$ são os graus de liberdade da distribuição. Para $\nu = 1$, tem-se a distribuição de Cauchy. Para $\nu > 20$, a distribuição t -Student é, assintoticamente, a distribuição normal. Para $2 < \nu < 20$ tem-se a distribuição t -Student.

2.4 Distribuição skew-t tipo 3

A distribuição skew-t tipo 3 (ST3) foi obtida pelo método de Fernández e Steel (1995). Neste caso, não é preciso fazer uso da função de distribuição acumulada, sendo dado por:

$$f_Z(z; \mu, \sigma, \tau, \nu) = \begin{cases} k\sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \frac{1}{\tau^2} \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z \geq 0 \\ \sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \tau^2 \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z < 0 \end{cases}$$

em que, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $k = \frac{2}{\tau + \frac{1}{\tau}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\pi\nu)^{\frac{1}{2}}}$, sendo que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, $\tau > 0$ é o parâmetro de forma e $\nu > 0$ são os graus de liberdade.

A distribuição ST3 é uma das cinco versões assimétricas para a distribuição t, definida com quatro parâmetros, tendo suporte no conjunto dos reais. Para a notação, adotar-se-á $Z \sim ST3(\mu, \sigma^2, \tau, \nu)$. Na Figura 3, tem-se algumas formas de assimetria para a distribuição e, ainda, é possível observar o comportamento dos submodelos da distribuição ST3.

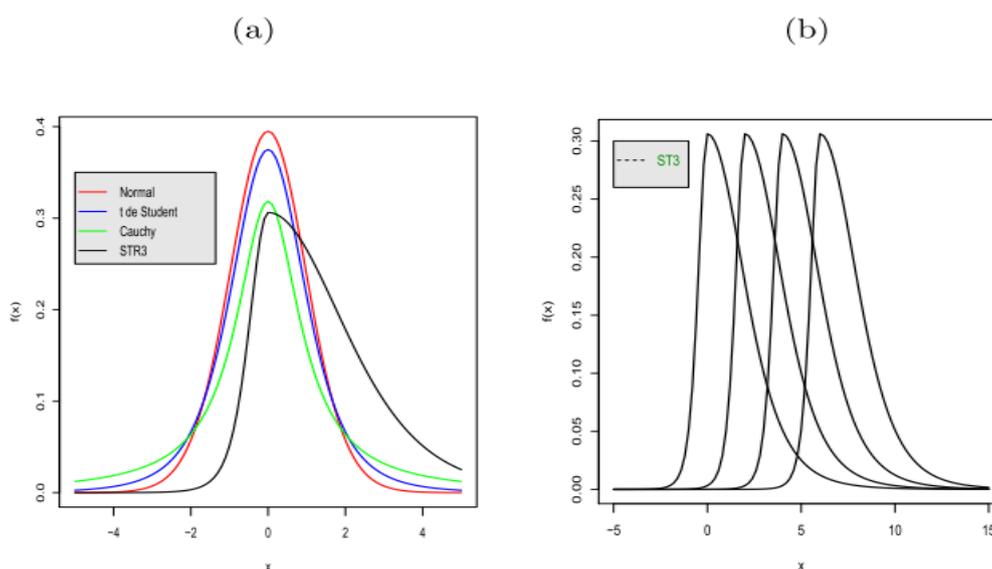


Figura 3: (a) Densidades da distribuição ST3, para valores diferentes de μ , fixando $\sigma = 1$, $\tau = 2$ e $\nu = 6$; (b) Densidades Normal, t de Student, Cauchy e ST3, para diferentes valores de ν , fixando $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\tau = 1$.

2.5 Critério de seleção dos modelos

A escolha do modelo apropriado, do ponto de vista estatístico, é um tópico extremamente importante na análise de dados (Bozdongan 1987; Akaike, 1974). Um dos critérios de informação (IC) tem a seguinte forma, segundo (Konishi; Kitagawa, 2008):

$$\begin{aligned}
 IC(X_n, \hat{G}) &= -2 \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \hat{\theta}(X_i)) + 2(\text{vies}) \\
 &= -2 \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \hat{\theta}(X_i)) + 2(b(G))
 \end{aligned}$$

Fundamentado no conceito de informação, ele oferece uma medida relativa das informações perdidas, quando um determinado modelo é utilizado para descrever a realidade. Dessa forma, mostrou que o viés $b(G)$ é dado assintoticamente por:

$$b(G) = \text{tr}I(\theta_0)J(\theta_0)^{-1},$$

sendo que $J(\theta_0)$ é a matriz de informação de Fisher de g e $I(\theta_0)$ é dado por

$$I(\theta_0) = \int g(x) \frac{\partial(x|\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial(x|\theta)}{\partial\theta^T}$$

O AIC é um critério que avalia a qualidade do ajuste do modelo paramétrico, estimado pelo método da máxima verossimilhança; tendo fundamentos ligados ao fato que o viés assintótico (2.6) tende ao número de parâmetros a serem estimados no modelo, pois sob a suposição de que existe um θ_0 no espaço paramétrico Θ tal que $g(x) = f(x|\theta_0)$, ocorre a igualdade das expressões $I(\theta_0) = J(\theta_0)$, e assim obtém-se que na equação (2.6) que:

$$\begin{aligned} b(G) &= E_{G(x_n)} \left[\log f \left(X_n | \hat{\theta}(X_n) \right) - n E_{G(Z)} \left[\log f \left(Z | \hat{\theta}(X_n) \right) \right] \right] \\ &= \text{tr } I(\theta_0) J(\theta_0)^{-1} = \text{tr } (I_p) = p, \end{aligned}$$

em que p é o número de parâmetros a serem estimados no modelo.

Substituindo o resultado obtido em (2.7) na expressão (2.5), Akaike (1974) definiu seu critério de informação da seguinte forma,

$$AIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + 2(p)$$

A derivação completa do resultado acima pode ser encontrada, por exemplo, em Emiliano (2013) e Konishi e Kitagawa (2008). O modelo com menor valor de AIC é considerado o modelo de melhor ajuste. Existem várias correções para melhorar o comportamento do AIC, no sentido de diminuir a probabilidade de selecionar uma ordem maior do que a necessária. Modificações do AIC incluem o critério de informação Bayesiano.

O Critério Bayesiano de Schwarz (BIC) tem como pressuposto a existência de um “modelo verdadeiro” que descreve a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias entre os diversos modelos sob seleção. Assim o critério é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre os avaliados.

Seja $f(x_n|\theta)$ um modelo estocástico estimado através do método da máxima verossimilhança. Então, o critério de informação Bayesiano (BIC) é dado por:

$$BIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + p \log(n)$$

em que $L(\hat{\theta})$ é a verossimilhança do modelo ajustado, p é o número de parâmetros a serem estimados e n o número de observações da amostra. O modelo com menor BIC é considerado o melhor ajuste.

2.6 Estimação por máxima verossimilhança

Neste estudo, foi considerado o delineamento inteiramente casualizado, porém sob a suposição que os resíduos seguem uma distribuição ST3. Sabe-se que em tal delineamento os modelos normais são aplicados com muita frequência, principalmente, em áreas de estudo como: agrônômia, engenharias, ciências biológicas, etc. Entretanto, quando os dados apresentam assimetria, curtose ou bimodalidade este modelo torna-se inadequado para ser utilizado na modelagem dos dados. Dessa forma, neste momento, estão sendo apresentados os estudos referentes às inferências estatísticas, tanto relacionados aos testes de hipótese quanto parte de estimação (intervalo de confiança). E, ainda, foram enfatizados os métodos computacionais de estimação existentes no *software* R. Sendo assim, o modelo de um ensaio em DIC tem a seguinte forma:

$$Y_{ij} = m + \tau_i + \sigma \epsilon_{ij}$$

em que Y_{ij} representa o valor esperado do tratamento i , m é o efeito da média geral, τ_i é o efeito do tratamento i e $\epsilon_{ij} \sim ST3(0, \sigma^2, \nu, \alpha)$ representam os efeitos do fator não controlado do ensaio experimental, com $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$, sendo que I denota o número de tratamentos e J o número de repetições.

Seja y_{11}, \dots, y_{IJ} uma amostra de tamanho n da distribuição ST3. Então, o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\theta = (m, \tau^T, \sigma, \tau, \nu)^T$, em que $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_I)^T$ é dada por:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \log \left\{ k \sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \frac{1}{\tau^2} \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \right\}$$

em que, $z_{ij} = (y_{ij} - m - \tau_i) / \sigma$. As estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ do vetor de parâmetros podem ser obtidas maximizando a log-verossimilhança (7). Nesta etapa, foram utilizados os métodos Nelder-Mead e o “L-BFGS-B” que são fornecidos no pacote “Optim” do *software* R, em que os valores iniciais podem ser obtidos da função “*summary.lm*”. Além disso, o “Optim” fornece a opção “gr” em que o usuário pode fornecer o vetor escore que tornar o algoritmo mais eficiente. Neste sentido, para obter as componentes do vetor score $U(\theta)$ do modelo ST3 derivou-se a função log-verossimilhança (7) em relação a ν, m, μ, τ e σ . Dessa forma as componentes do vetor escore $U(\hat{\theta})$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
 U_{\nu}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} \boldsymbol{\tau}^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \pi\nu - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) \pi\nu - \pi \right]}{2\sqrt{\pi\nu}} \right\} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2}{\nu\sigma^2 \boldsymbol{\tau}^2} \right] + \frac{(\nu+1) + (y_{ij} - \mu)^2}{2\nu [\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2]} \right\}, \\
 U_{\mu}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right) (-2y_{ij} + 2\mu)}{\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2} \right\}, \\
 U_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{-\boldsymbol{\tau}^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} - (\nu+1) [\boldsymbol{\tau}^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}]}{\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau}^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu})} \right\}, \\
 U_{\sigma}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{1}{\sigma} - \frac{(\nu+1)(y_{ij} - \mu)^2}{\sigma [\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2]} \right\}.
 \end{aligned}$$

Igualando essas equações a zero e resolvendo-as, simultaneamente, obtêm-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros utilizando métodos numéricos.

Sob certas condições de regularidade o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, em seu espaço paramétrico, tem distribuição assintótica $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ normal multivariada $N_{I+4}(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $K(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada. A matriz de covariâncias assintóticas $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser aproximada pela inversa de $(I+4) \times (I+4)$ da matriz de informação observada $-\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$, isto é, pode-se inverter a matriz de informação observada da função dos parâmetros para obter uma aproximação da matriz de covariâncias. Assim, com as EMVs podem fornecer regiões de confiança utilizando a normalidade assintótica. Então, as inferências assintóticas para os vetores de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ podem ser realizadas utilizando aproximação normal $N_{I+4}(0, -\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e os erros-padrão para as EMVs podem ser obtidas pela raiz quadrada dos elementos da diagonal principal da inversa da matriz de informação observadas e podem ser formuladas hipóteses e serem testadas. Os elementos da matriz de informação observada são dadas por:

$$\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{mm} & J_{m\tau_1} & \cdots & J_{m\tau_I} & J_{m\sigma} & J_{m\lambda} & J_{m\alpha} \\ \cdot & J_{\tau_1\tau_1} & \cdots & J_{\tau_1\tau_I} & J_{\tau_1\sigma} & J_{\tau_1\lambda} & J_{\tau_1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & J_{\tau_I\tau_I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\sigma\sigma} & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\lambda\lambda} & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\alpha\alpha} \end{pmatrix},$$

para $i = i' = 1, \dots, I$ e $j = j' = 1, \dots, J$ que são obtidas numericamente. A distribuição normal assintótica $N_{I+4}(0, -\mathbf{\hat{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ pode ser utilizado para construir regiões aproximadas de confiança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Neste caso, os intervalos de confiança assintóticos $100(1 - \gamma)\%$ para cada componente do vetor de parâmetros θ_r é dado por:

$$IC_r = \left(\hat{\theta}_r - z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}}, \hat{\theta}_r + z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}} \right)$$

em que $-\hat{L}^{r,r}$ denota o r -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz de informação observada $-\mathbf{\hat{L}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$ e $z_{\frac{\gamma}{2}}$ é o quantil $1 - \gamma/2$ da distribuição normal padrão.

A normalidade assintótica, também, é útil para testes de qualidade de ajuste de alguns submodelos. A estatística de razão de verossimilhança (RV) pode ser utilizada para comparar a distribuição $OLLSN(\mu, \sigma^2, \lambda, \alpha)$ com os submodelos normal e *skew* normal. Por isso, obtém-se o valor da estatística w da função log-verossimilhança LV do modelo restrito sob o modelo irrestrito a ser testado. Em alguns casos, testa-se a hipótese do tipo $H_0: \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$ versus $H: \boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\psi}_0$, em que $\boldsymbol{\psi}$ é o vetor formado com alguns componentes de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\psi}_0$ é um vetor específico, que é realizado utilizando a estatística LV. Por exemplo, a hipótese $H_0: \alpha = 1$ versus $H: H_0$ não é verdadeira é equivalente comprar $OLLSN(\mu, \sigma^2, \lambda, \alpha)$ com a distribuição de *skew* normal sendo que a estatística W é obtida por:

$$w = 2\{l(\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) - l(1, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma})\},$$

em que $\hat{\alpha}, \hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ são as EMVs sob H e $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\sigma}$ são as estimativas sob H_0 .

A comparação de diferenças de tratamentos foi realizada por meio de intervalos de confiança fazendo restrições nas colunas da matriz de delineamento experimental. Por exemplo, para comparar os tratamentos *Treat 1, Treat 2, ..., Treat I* em relação ao *Treat 1* basta fazer *Treat 1 = 0* e, assim, para os demais I tratamentos. O *software* R fornece a função “*relevel(,)*” que permite tais restrições. Qualquer interessado nas rotinas computacionais basta solicitar a um dos autores.

2.7 Estudo de simulação

Nesta subseção, o estudo de simulação Monte Carlo foi realizado para avaliar o comportamento das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros μ, σ, ν e τ . Os resultados foram obtidos a partir de 1.000 simulações Monte Carlo. Para cada réplica, uma

amostra de tamanho n é obtida a partir da distribuição $ST3(\mu, \sigma, \nu, \tau)$ e os parâmetros são obtidos pelo método da máxima verossimilhança. Desta forma, para cada combinação de n, μ, ν e τ , 1.000 amostras foram geradas e ajustou-se o modelo $ST3(\mu, \sigma, \nu, \tau)$.

Neste estudo de simulação, consideram-se dois cenários com as seguintes configurações:

1. **Cenário:** $n = (20, 200, 1000), \mu = 0, \sigma = 1, \nu = 3$ e $\tau = 1$
2. **Cenário:** $n = (20, 200, 1000), \mu = 22, \sigma = 0,204, \nu = 2,372$ e $\tau = 0,881$.

Na Tabela 3 observou-se que os erros quadráticos médios (EQM) diminuem à medida que o tamanho da amostra aumentou. Este comportamento é esperado quando os estimadores têm boas propriedades estatísticas assintóticas. Esse fato confirma que, assintoticamente, a distribuição normal proporciona uma aproximação adequada para a distribuição amostral das estimativas.

Tabela 3: Média e Erro Quadrático Médio (EQM) das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo ST3

1º Cenário						
Parâmetro	n=20		n=200		n=1000	
	Média	EQM	Média	EQM	Média	EQM
$\mu = 0$	0,162	0,460	0,001	0,016	0,007	0,002
$\sigma = 1$	1,233	0,606	1,105	0,021	1,056	0,005
$\nu = 3$	6,654	69,370	3,081	0,086	3,023	0,004
$\tau = 1$	3,262	44,739	1,151	0,032	1,065	0,006
2º Cenário						
Parâmetro	n=20		n=200		n=1000	
	Média	EQM	Média	EQM	Média	EQM
$\mu = 22,00$	22,001	0,009	21,992	0,0004	21,999	0,00003
$\sigma = 0,204$	0,296	0,023	0,230	0,001	0,218	0,0002
$\nu = 2,372$	3,394	11,734	2,480	0,032	2,393	0,001
$\tau = 0,881$	1,794	7,709	1,016	0,025	0,939	0,004

2.8 Análise de resíduos

Para detectar possíveis observações discrepantes, assim como alguns desvios em relação às hipóteses do ajuste do modelo de regressão, foram feitos gráficos dos resíduos quantílicos A fim de detectar possíveis observações discrepantes, assim como alguns desvios em relação às hipóteses do ajuste do modelo de regressão, foram feitos gráficos dos resíduos quantílicos *versus* index e o dos resíduos quantílicos *versus* quantis normais. Vale ressaltar que os resíduos quantílicos normalizados são assintoticamente normais quando o modelo ajustado é adequado para explicar os dados estudados.

2.8.1 Resíduo quantílico

Dunn e Smyth (1996) propuseram uma técnica para fazer análise de resíduos que é conhecido por resíduos quantílicos (rq). Este método gera resíduos para uma distribuição contínua por meio dos desvios e dos resíduos quantis, respectivamente. O propósito dos autores foi utilizar a i -ésima observação do resíduo quantílico (rq) como uma medida de discrepância entre y_{ij} e $\hat{\mu}_{ij}$. Dessa forma, o resíduo quantílico $\hat{r}q_{ij}$ para o modelo (6) pode ser definido por:

$$\hat{r}q_{ij} = \Phi^{-1}\{\Phi_{ST3}(\hat{y}, \mu = \hat{\mu}, \sigma = \hat{\sigma}, \nu = \hat{\nu}, \tau = \hat{\tau})\},$$

em que $\Phi(\cdot)^{-1}$ é a função quantílica da distribuição normal padrão e $\Phi_{ST3}(\cdot) = Q_{ST3}(\cdot)$ é o quantil da distribuição t Student tipo 3.

Atkinson (1987), sugeriu a construção de envelopes simulados para interpretar o gráfico normal de probabilidade dos resíduos. Tais envelopes são bandas de confiança simuladas que cobrem os resíduos, de tal forma que, se o modelo estiver bem ajustado, a maioria dos pontos estarão dentro do envelope.

Para a construção das bandas de confiança recomendam-se os seguinte passo:

1. Ajustar o modelo proposto e calcular os resíduos rq_{ij} 's;
2. Simular k amostras da variável resposta utilizando o modelo ajustado;
3. Ajustar o modelo proposto para cada uma das amostras simuladas e calcular os seus respectivos resíduos simulados rq_{ij} , com $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = 1, 2, \dots, n$;
4. Colocar cada grupo de IJ resíduos em ordem crescente, obtendo $y_{(ij)k}$ para $k = 1, 2, \dots, K$;
5. Para cada ij calcular a média, o mínimo e os máximos dos resíduos $y_{(ij)k}$, ou seja,

$$y_{(ij)k} = \sum_{k=1}^K \frac{t_{(ij)k}}{K}, y_{(ij)B} = \min\{y_{(ij)k}: 1 \leq k \leq K\} \text{ e}$$
$$y_{(ij)H} = \max\{y_{(ij)k}: 1 \leq k \leq K\}$$

6. Incluir as médias, os mínimos e os máximos conjuntamente com os valores rq_{ij} contra os quantis esperados da distribuição normal padrão.

O modelo ST3 estará bem ajustado, se os resíduos rq_{ij} apresentam um comportamento aleatório em torno de zero. Foram realizadas 19 simulações sugeridas por (ATKINSON, 1987). Por isso, existe 1 chance em 20 ou 5% de que o maior valor absoluto dos resíduos dos dados estudados esteja fora do envelope simulado, assumindo que o modelo esteja bem ajustado.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Figura 4, apresente uma análise estatística descritiva para cada um dos tratamentos (*Trat 1, Trat 2, Trat 3, Trat 4, Trat 5, Trat 6 e Trat 7*). Observou-se nos tratamentos (*Trat 1, Trat 2 e Trat 4*) que os valores das médias amostrais foram superiores aos das medianas, enquanto que para os outros tratamentos (*Trat 3, Trat 5, Trat 6 e Trat 7*) tais valores são praticamente iguais. Tal fato, evidencia que a distribuição normal pode ser inadequada para esse ajuste. Outro fato a ser destacado é a possível violação da pressuposição de homogeneidade exigida na análise de variância, ao ajustar-se o modelo normal. Tal pressuposição pode interferir nos resultados dos testes de médias, inferindo diferenças significativas entre médias dos tratamentos, quando na realidade não existem ou o contrário. Dessa forma, tem-se evidências que uma distribuição assimétrica pode ser utilizada para o ajuste do teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja.

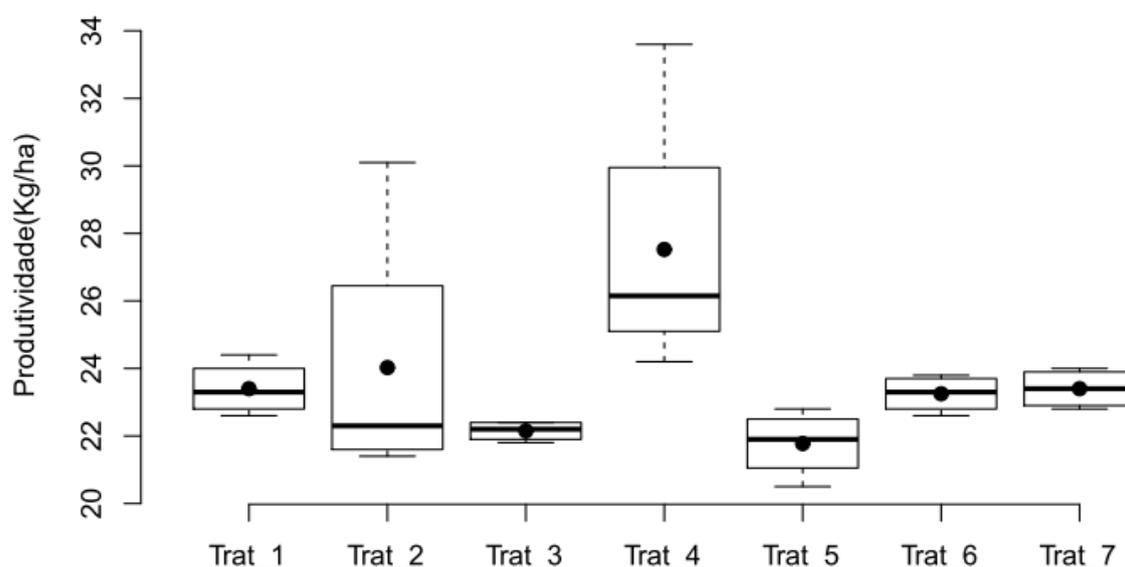


Figura 4: Boxplot para cada um dos tratamentos sendo que \cdot representa suas respectivas médias.

Na Tabela 4 estão as estimativas dos parâmetros para os modelos normal e ST3. Dentre tais estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) destacam-se os erros-padrão e os valores de Critério de Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Baysiano (BIC). De acordo com os critérios, quanto menor forem estas estimativas, melhor o ajuste. Enquanto que na Tabela 5 encontram-se os valores do teste de razão de verossimilhança e do seu nível descritivo. Conforme os resultados, existem evidências estatísticas que o modelo ST3 pode ser utilizado para análise dos dados de densidade.

Tabela 4: Estimativas de máxima verossimilhança e os critérios de informação

Normal				ST3			
θ	MLE	E.P.	p-valor	θ	MLE	E.P.	p-valor
m	23,400	0,986	<0,001	m	22,617	0,186	<0,001
τ_2	0,625	1,395	0,659	τ_2	-1,204	0,302	<0,001
τ_3	-1,250	1,395	0,380	τ_3	-0,796	0,246	<0,001
τ_4	4,125	1,395	0,007	τ_4	3,586	0,497	<0,001
τ_5	-1,625	1,395	0,257	τ_5	-1,008	0,350	<0,001
τ_6	-0,150	1,395	0,915	τ_6	0,001	0,254	0,994
τ_7	0,000	1,395	1,000	τ_7	0,199	0,271	0,472
σ	0,679	0,133	<0,001	σ	0,204	0,266	<0,001

ν	-	-	-	ν	2,372	0,187	<0,001
α	-	-	-	α	0,881	0,324	0,701
	DG	AIC	SBC		DG	AIC	SBC
	117,512	133,512	144,169		79,765	99,765	113,087

Tabela 5: Teste de razão de verossimilhança para verificar se existe diferença estatística entre os modelos ST3 e o Normal.

Modelos	Hipóteses	Estatística w	p-valor
Normal <i>vs</i> ST3	$H_0: \lambda = 1$ <i>vs</i> $H_1: H_0$ é falsa	37,747	<0,001

No ajuste do modelo (6), foi realizada uma restrição na solução, isto é, considerou-se o efeito do tratamento $\tau_1 = 0$. Dessa forma, as estimativas dos parâmetros ($\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ e τ_7) representam diferenças médias em relação ao tratamento τ_1 . Isto significa que as interpretações devem ser feitas em relação ao tratamento que foi realizado a restrição τ_1 . Observa-se, ainda, que para os dois modelos ajustados (Normal e ST3) as estimativas dos parâmetros estão coerentes com os resultados mostrados na Figura 5, visto que os efeitos médios de todas as diferenças estimadas apresentam valores positivos, conforme pode ser observado na Tabela 4.

Em relação às estimativas dos erros-padrão, a distribuição normal apresentou valores iguais (1,395), indicando homogeneidade dentro dos tratamentos, fato que não foi verificado na Figura 4. Enquanto que o modelo ST3 evidencia ter modelado melhor a variância dentro dos tratamentos. Por exemplo, o tratamento (τ_5) foi que apresentou maior variância e, também, o que apresentou maior erro padrão (0,350) e o τ_3 foi o que apresentou menor variância e, também, o que apresentou menor erro padrão (0,246). Assim, destaca-se a distribuição ST3 que apresentou estimativas para os erros-padrão menores do que o modelo normal.

Na Tabela 5, o nível descritivo (<0,001) evidencia que existe diferença estatística entre os modelos ST3 e a Normal. Assim, após as análises dos critérios de comparação, dos erros-padrão do teste de razão de verossimilhança utilizou-se a distribuição ST3 para explicar os dados.

Portanto, utilizando a distribuição ST3 para explicar os dados foram construídos intervalos de confiança para todos os tratamentos tomando dois a dois, conforme apresentado na Tabela 6.

Tabela 6: Resultado da comparação dos 7 tratamentos utilizados para avaliar o teor de B e a absorção de S em grãos de soja

Hipóteses	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}	Hipóteses	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}
$H_0: \tau_2 - \tau_1 = 0$	-1,204	-1,824	-0,583	$H_0: \tau_1 - \tau_2 = 0$	1,204	0,583	1,824
$H_0: \tau_3 - \tau_1 = 0$	-0,796	-1,301	-0,290	$H_0: \tau_3 - \tau_2 = 0$	0,409	-0,180	0,998
$H_0: \tau_4 - \tau_1 = 0$	3,587	2,567	4,608	$H_0: \tau_4 - \tau_2 = 0$	4,791	3,727	5,855
$H_0: \tau_5 - \tau_1 = 0$	-1,009	-1,727	-0,290	$H_0: \tau_5 - \tau_2 = 0$	0,197	-0,583	0,975
$H_0: \tau_6 - \tau_1 = 0$	0,002	-0,520	0,524	$H_0: \tau_6 - \tau_2 = 0$	1,206	0,602	1,810
$H_0: \tau_7 - \tau_1 = 0$	0,200	-0,359	0,758	$H_0: \tau_7 - \tau_2 = 0$	1,403	0,770	2,038
$H_0: \tau_1 - \tau_3 = 0$	0,796	0,290	1,301	$H_0: \tau_1 - \tau_4 = 0$	-3,587	-4,608	-2,567
$H_0: \tau_2 - \tau_3 = 0$	-0,409	-0,998	0,180	$H_0: \tau_2 - \tau_4 = 0$	-4,791	-5,855	-3,727
$H_0: \tau_4 - \tau_3 = 0$	4,382	3,381	5,384	$H_0: \tau_3 - \tau_4 = 0$	-4,382	-5,384	-3,381
$H_0: \tau_5 - \tau_3 = 0$	-0,212	-0,903	0,479	$H_0: \tau_5 - \tau_4 = 0$	-4,595	-5,720	-3,470
$H_0: \tau_6 - \tau_3 = 0$	0,798	0,313	1,282	$H_0: \tau_6 - \tau_4 = 0$	-3,585	-4,595	-2,574
$H_0: \tau_7 - \tau_3 = 0$	0,995	0,472	1,518	$H_0: \tau_7 - \tau_4 = 0$	-3,388	-4,417	-2,359
$H_0: \tau_1 - \tau_5 = 0$	1,009	0,290	1,727	$H_0: \tau_3 - \tau_6 = 0$	-0,798	-1,282	-0,313
$H_0: \tau_2 - \tau_5 = 0$	-0,197	-0,975	0,583	$H_0: \tau_4 - \tau_6 = 0$	3,585	2,574	4,595
$H_0: \tau_3 - \tau_5 = 0$	0,212	-0,479	0,903	$H_0: \tau_5 - \tau_6 = 0$	-1,010	-1,713	-0,307
$H_0: \tau_4 - \tau_5 = 0$	4,595	3,470	5,720	$H_0: \tau_7 - \tau_6 = 0$	0,198	-0,341	0,737
$H_0: \tau_6 - \tau_5 = 0$	1,010	0,307	1,713	$H_0: \tau_1 - \tau_6 = 0$	-0,002	-0,524	0,520
$H_0: \tau_7 - \tau_5 = 0$	1,208	0,478	1,938	$H_0: \tau_5 - \tau_6 = 0$	-1,010	-1,713	-0,307

3.1. Análise de resíduos

Com a finalidade de detectar algumas observações discrepantes e, também, alguns desvios das suposições do modelo de regressão foram realizados estudos de análises de resíduos para os modelos normal e ST3. Tais resultados foram apresentados na Figura (5), sendo que os gráficos (a) e (c) representam os resíduos quantílicos versus os índices e os (b) e (d) representam os envelopes simulados para as respectivas distribuições. Especificando cada item observa-se em (a) que existem evidências de uma possível violação da independência dos parâmetros de locação e de escala. Enquanto que em (c) os resíduos quantílicos estão bem distribuídos em torno de zero e não apresentam evidências de problemas de dependência entre o modelo esperado e a variação dos dados. Para os envelopes simulados no item (b) muitos pontos estimados encontram-se fora do envelope indicando que a distribuição normal não foi bem ajustada. Entretanto, no item (d) a maioria dos pontos estimados encontram-se dentro do envelope indicando que a distribuição ST3 ajustou-se bem aos dados e pode ser utilizada para explicar o efeito do teor de B e a absorção de S na produção de grãos. Portanto, a distribuição

assimétrica ST3 ajustou-se melhor aos dados do que o modelo normal, neste exemplo específico de ensaios inteiramente casualizados.

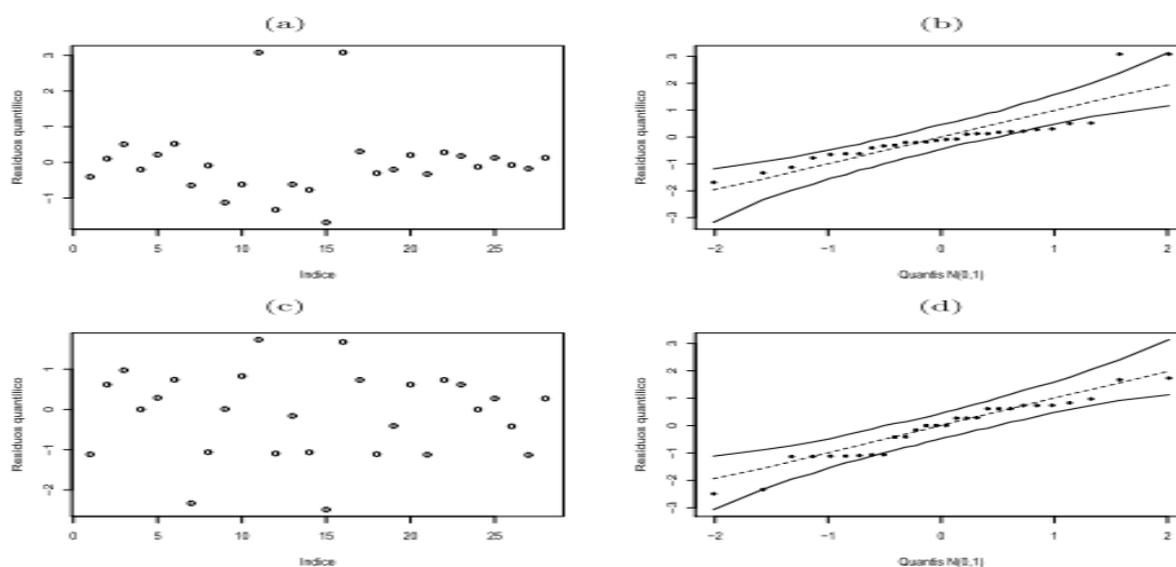


Figura 5: (a) e (c) gráficos de índices versus resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente. (b) e (d) gráfico de envelopes simulados dos quantis normais versus os resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente.

4. CONCLUSÕES

A nova distribuição de probabilidade com quatro parâmetros chamada assimétrica t-Student assimétrico tipo 3 (ST3) foi proposta com sucesso nos estudos com ensaios de delineamento inteiramente casualizado. Tal distribuição ajusta-se a dados com a presença de assimetria e, ainda, é analiticamente tratável. Também, permite testar a qualidade do ajuste com alguns de seus submodelos: normal, Cauchy e Student. Foram fornecidas algumas propriedades matemáticas, incluindo, assimetria e curtose. O ajuste do modelo foi realizado utilizando o método da máxima verossimilhança, de forma fácil e intuitiva, por meio de rotinas computacionais implementadas no software estatístico R. O modelo pode ser utilizado em situações práticas de delineamentos experimentais com interpretações de interesse do pesquisador sem a necessidade das pressuposições exigidas pela análise de variância. Para explicar o efeito do teor de B e a absorção de S na produção de grãos de soja o modelo t-Student assimétrico tipo 3 (ST3) ajustou-se melhor do que a distribuição normal.

5. REFERÊNCIAS

- [1] AKAIKE, H. A New Look at Statistical Model Identification. **IEEE Trans. Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- [2] ATKINSON, A. C. **Plots, transformations and regression: an introduction to graphical methods of diagnostics regression analysis**. Oxford: Clarendon press, 1987.
- [3] AZZALINI, A. A class of distributions which includes the normal ones. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 12, n. 2, p. 171-178, 1985.
- [4] AZZALINI A.; CAPITANIO, A. Statistical application of the multivariate skew normal distribution. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)**, v. 61, n. 3, p. 579-602, 1999.
- [5] AZZALINI, A.; CAPITANIO, A. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)**, v. 65, n. 2, p. 367-389, 2003.
- [6] BANZATO D. A.; KRONKA, S. d. N. **Experimentação agrícola**. 4 ed. Jaboticabal: Funep, 2013.
- [7] BOWLEY, A. L. **Elements of statistics**. 2 ed. Michigan: P.S. King & Son, Limited, 1920.
- [8] BOZDOGAN, H. Model selection and akaike's information criterion (aic): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, v. 52, n. 3, p. 345-370, 1987.
- [9] CAMPOS, A. M. **Uma abordagem bayesiana para alguns modelos de crescimento na presença de assimetria e heterocedasticidade**. (Dissertação) Mestrado em Ciências da Computação e Matemática – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- [10] CRUZ, R. D. I.; BRANCO, M. D. Bayesian analysis for nonlinear regression model under skewed errors, with application in growth curves. **Biometrical Journal**, v. 51, n. 4, p. 588-609, 2009.
- [11] DICICCIO T. J.; MONTI, A. C. Inferential aspects of the skew exponential, power distribution. **Journal of the American Statistical Association**, v. 99, n. 466, p. 439-450, 2004.
- [12] DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 5, n. 3, p. 236-244, 1996.
- [13] EMILIANO, P. C. **Críterios de informação: como eles se comportam em diferentes modelos**. (Tese) Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.
- [14] FERNÁNDEZ C.; OSIEWALSKI, J.; STEEL, M. F. J. Modeling and inference with v-spherical distribution. **Journal of the American Statistical Association**, v. 90, n. 432, p. 1331-1340, 1995.

- [15] FERNÁNDEZ C.; STEEL, M. F. J. On Bayesian modeling of fat tails and skewness. **Journal of the American Statistical Association**, v. 93, n. 441, p. 359-371, 1998.
- [16] GALTON, F. **Inquiries Into the Human Faculty**. London: Macmillan and Co, 1883.
- [17] GENTON, M. G. **Skew-elliptical distributions and their application**. New York: Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [18] GUEDES T. A.; ROSSI, R. M.; MARTINS A. B. T.; JANEIRO, V.; CARNEIRO, J. W. P. Applying regression models with skew-normal errors to the height of bedding plants of *stevia rebaudiana* (bert) bertoni. **Acta Scientiarum Technology**, v. 36, n. 3, p. 463-468, 2014.
- [19] JOHNSTON J. M.; PENNYPACKER, H. S. **Strategies and tactics of behavioral research**. 3. ed, New York: Routledge, 1993.
- [20] KONISHI, S.; KITAGAWA, G. **Information criteria and statistical modeling**. New York: Springer-Verlag, 2008.
- [21] MACERAU, W. M. O. **Comparação das distribuições alpha-estável, normal, t de student e Laplace assimétricas**. (Dissertação) Mestrado em Estatística – Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.
- [22] MAGALHÃES, M. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: EDUSP, 3. ed, 2013.
- [23] MOOD A. M. **Introduction to the Theory of Statistics**. New York: McGraw-Hill Education, 1974.
- [24] MOORS, J. J. A. A quantile alternative for kurtosis. **Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)**, v. 37, n. 1, p. 25-32, 1988.
- [25] RIGBY, R. A.; STATINOPOULOS, D. M. Generalized additive models for location, scale and shape. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, v. 54, n. 3, p. 507-554, 2005.
- [26] ROSSI, R. M.; SANTOS, L. A. Modelagem bayesiana para curvas de crescimentos de codornas assumindo assimetria nos erros. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 35, n. 3, p. 1637-1648, 2014.
- [27] SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461-464, 1978.
- [28] YULE, G. U. **Introduction to the theory of statistics**. London: Charles griffin and Company, 1912.